Il paradosso del gelataio e altri problemi delle votazioni[1]

Alberto SARACCO[2]

1. Introduzione

Lo scopo di questo articolo è quello di dare una formalizzazione dei sistemi elettorali, di scelta e di votazione, per poi dimostrare alcuni interessanti (e paradossali) risultati. Ripropongo qui, con maggiori dettagli tutte le cose dette nel corso del mio seminario per gli studenti. Cerco di dare una formalizzazione e una matematizzazione maggiore rispetto a quella data nel seminario, senza tuttavia diminuire la comprensibilità per i non matematici. Iniziamo schematizzando un'elezione con un solo argomento in discussione e due candidati, che porta al paradosso del gelataio citato nel titolo. Quindi passiamo ad esaminare elezioni a più argomenti e più possibili candidati e le cose peggioreranno notevolmente: addirittura non è più possibile dire quale è la volontà della maggioranza! La parte principale dell'articolo consiste nella formalizzazione matematica del concetto di elezione e di legge di benessere sociale, nonché nella dimostrazione del paradossale teorema di Arrow: non esistono sistemi elettorali buoni[3]! Concludiamo infine citando alcuni interessanti paradossi della ripartizione proporzionale dei seggi, tramite aneddoti tratti dalla storia delle elezioni negli Stati Uniti.

2. Il paradosso del gelataio

Immaginiamo una spiaggia assolata lunga un chilometro, in agosto, piena di bagnanti (supporremo per ora distribuiti uniformemente lungo la spiaggia). Due gelatai hanno il permesso di vendere gelati sulla spiaggia. Dove si metteranno i due gelatai? Se noi siamo un bagnante vorremmo sicuramente avere un gelataio vicino alla nostra sdraio, per fare meno strada possibile quando abbiamo voglia di un gelato. Se ci interessiamo della volontà di tutti i bagnanti, la posizione migliore dei due gelatai è sicuramente quella di avere un gelataio a $250m$ dall'inizio della spiaggia e uno a $750m$ dall'inizio della spiaggia, così che ogni bagnante debba fare al più $250m$ per avere il suo gelato. Il punto importante è che mediamente ogni bagnante compie solo $125m$[4] per arrivare dal gelataio più vicino.

---

1 Parte di questo testo è basato su una rivisitazione di un testo di Dario Palladino, dell'Università di Genova, che avevo trovato su internet nel 2005. Non è più disponibile su internet e pertanto sono stato costretto a rimuovere l'indicazione bibliografica. Voglio comunque esprimere la mia gratitudine all'autore per quella preziosa fonte di ispirazione

2 Dipartimento di Matematica, Università di Parma, Viale G.P. Usberti 53/a, Parma (alberto.saracco@unipr.it).

3 Il discorso, forzatamente vago, sarà reso perfettamente rigoroso nella trattazione del teorema.

4 Questo risultato, di per sé molto intuitivo, può essere rigorosamente trovato minimizzando il costo di spostamento dei bagnanti, dato da $C(a,b)=\int_S \min\{|x-a|,|x-b|\}\,dx$ dove a e b sono le posizioni dei gelatai sulla spiaggia. Il costo di spostamento dei bagnanti così definito è proporzionale al tragitto medio compiuto da un bagnante. Nel caso di distribuzione non uniforme, l'optimum per i bagnanti si raggiunge minimizzando lo stesso integrale, in cui a dx sia stata sostituita da $d\lambda$, la misura di densità dei bagnanti sulla spiaggia. Ovviamente la funzione "costo" $\min\{|x - a|, |x - b|\}$ può essere sostituita con una qualsiasi funzione monotona crescente (e concava) di $\min\{|x - a|, |x - b|\}$. Così facendo il costo di spostamento per i bagnanti $C(a,b)$ non è più proporzionale al tragitto medio per bagnante bensì al costo medio di spostamento per bagnante.

Se noi siamo un gelataio, il nostro obbiettivo è diverso: vogliamo vendere più gelati possibile. Pertanto, la posizione ottimale per i bagnanti descritta sopra non è affatto stabile. Il primo gelataio, sicuro che i bagnanti dei primi 250*m* di spiaggia si serviranno comunque da lui e non dal collega più distante inizia ad avvicinarsi al collega per rubargli clienti. Anche l'altro ha la stessa idea e si muove verso l'inizio della spiaggia. La posizione stabile raggiunta in questo modo è quella di due gelatai fianco a fianco al centro della spiaggia.
Più in generale, qualunque sia la distribuzione dei bagnanti sulla spiaggia, i due gelatai tenderanno a stare fianco a fianco sulla mediana, ovvero lasciandosi entrambi il 50% dei bagnanti a destra e il 50% dei bagnanti a sinistra.
La stessa schematizzazione matematica si ha per un'elezione in cui sia discusso un solo argomento, su cui si può avere una posizione che varia da estrema destra (inizio spiaggia) a estrema sinistra (fine spiaggia). Sostituiamo ai bagnanti gli elettori, ai gelatai i due candidati. Se pensiamo che ogni elettore voti il candidato che professa idee più vicine alle proprie e che ogni candidato abbia come obbiettivo quello di vincere l'elezione, assisteremo allo stesso curioso fenomeno: due candidati con posizioni molto simili.
La posizione della mediana (e anche qualsiasi altra posizione scelta dai due candidati) è tuttavia facilmente attaccabile dall'entrata in gioco di altri candidati: un terzo candidato può rubare voti a uno dei due candidati, impedendogli di vincere; un terzo e un quarto candidato - opportunamente coalizzati - possono impedire ai primi due di vincere le elezioni.
Ovviamente nel mondo reale non possiamo aspettarci che i bagnanti e gli elettori abbiano troppa pazienza e che accettino la situazione. In effetti il fenomeno dell'alienazione dell'elettore e del non voto è molto frequente. In [3] questa possibilità, come anche quella di posizioni politiche poco chiare e del problema dei finanziamenti, è analizzata nei dettagli.

3. Decisioni su più argomenti

Se in discussione sono più argomenti, la situazione si complica. Ogni elettore può infatti avere la propria personalissima opinione sull'importanza relativa delle varie questioni. Prendiamo in considerazione un caso molto semplice.
Esempio 1. Tre persone (*a*, *b*, *c*) devono accordarsi su due questioni indipendenti (*l*,*s*), per ognuna delle quali ci sono due possibilità (rispettivamente λ, Λ e σ, Σ). Le preferenze (elencate dalla migliore possibile alla peggiore possibile) di *a*, *b* e *c* sono le seguenti:

	1	**2**	**3**	**4**
a	(λ, σ)	(λ,Σ)	(Λ,σ)	(Λ,Σ)
b	(Λ,σ)	(Λ,Σ)	(λ,σ)	(λ,Σ)
c	(λ, Σ)	(Λ,Σ)	(λ,σ)	(Λ,σ)

Risalta immediatamente il fatto che non ci sono due persone d'accordo su quale sia la scelta migliore. Se poniamo a votazione le due questioni, una per volta, vincono λ su Λ (preferita da *a* e da *b*) e σ su Σ (preferita da a e da c).

Potremmo quindi decidere di candidarci promettendo di fare sia λ sia σ, sicuri di vincere. Se a questo punto un altro candidato promettesse di fare Λ e Σ, per quanto incredibile possa sembrare, vincerebbe in quanto (Λ,Σ) è preferita su (λ,σ) da b e da c.
Ma quindi cosa vuole la maggioranza? Può accadere che la volontà della maggioranza non sia ben definita e dipenda dal metodo elettorale? Dobbiamo chiederci innanzitutto cosa significa che la volontà della maggioranza è ben definita, ovvero definire matematicamente l'espressione "la volontà della maggioranza è ben definita".
Se A è l'insieme delle alternative, diremo che $x\in A$ è un'*alternativa maggioritaria* se per ogni altra alternativa $y\in A$, in una scelta tra x e y vince x.
Per definizione, esiste al massimo una alternativa maggioritaria. Diremo che *la volontà della maggioranza è ben definita* se esiste l'alternativa maggioritaria.

4. Esistenza dell'alternativa maggioritaria con tre elettori

Proponiamo ora un semplice metodo per analizzare l'esistenza dell'alternativa maggioritaria in un'elezione con tre votanti (cfr. [2]), come nell'esempio del paragrafo precedente. In [2] la situazione è analizzata sia per un numero finito di alternative sia per un infinità continua (indicizzata cioè da un parametro in $\mathbb{R}$) di alternative in cui la preferenza dei singoli votanti vari in modo continuo rispetto al parametro. Qui ci limitiamo a considerare il caso con un numero finito di alternative.
Sia $A = \{a1, \ldots, a_n\}$ l'insieme delle alternative e $C = \{x_1, x_2, x_3\}$ l'insieme dei votanti. Con $x_i : A \to \mathbb{R}^+,\ i = 1,2,3$ indicheremo anche, con abuso di notazione, una funzione di preferenza di x_i (ovvero x_i preferisce $a\in A$ a $b\in A$ se e solo se $x_i(a)>x_i(b)$ e trova indifferenti $a\in A$ e $b\in A$ se e solo se $x_i(a)=x_i(b)$).
Supponiamo che $a_{\bar{j}} \in A$ sia l'alternativa maggioritaria. Sia $a_j, j \neq \bar{j}$ un'altra alternativa. Osserviamo che allora vale una delle seguenti (con σ permutazione su tre elementi):

$$\begin{cases} x_{s(1)}(a_{\bar{j}}) > x_{s(1)}(a_j) \\ x_{s(2)}(a_{\bar{j}}) > x_{s(2)}(a_j) \\ x_{s(3)}(a_{\bar{j}}) > x_{s(3)}(a_j) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{s(1)}(a_{\bar{j}}) > x_{s(1)}(a_j) \\ x_{s(2)}(a_{\bar{j}}) > x_{s(2)}(a_j) \\ x_{s(3)}(a_{\bar{j}}) \leq x_{s(3)}(a_j) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{s(1)}(a_{\bar{j}}) > x_{s(1)}(a_j) \\ x_{s(2)}(a_{\bar{j}}) = x_{s(2)}(a_j) \\ x_{s(3)}(a_{\bar{j}}) = x_{s(3)}(a_j) \end{cases} \tag{1}$$

Rappresentiamo su un piano cartesiano con coordinate x_1, x_2 le alternative di A, in base all'ordine di preferenza dei votanti x_1 e x_2, come nell'esempio[5] in figura 1.

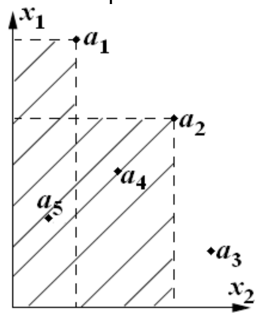

Figura 1. Rappresentazione grafica delle preferenze di x_1 ($a_1 >_1 a_2 >_1 a_4 >_1 a_5 >_1 a_3$) e di x_2 ($a_3 >_2 a_2 >_2 a_4 >_2 a_1 >_1 a_5$)

[5] Per semplicità, esponiamo solo il caso in cui la catena di preferenze dei tre elettori sia tutta di preferenze strette, cioè nessuno ritiene due alternative indifferenti. Il caso generale richiede solamente di considerare più casi, vedi [2].

Nell'esempio in figura 1, a_4 e a_5 non possono essere l'alternativa maggioritaria, a prescindere dalle preferenze del terzo votante, dato che sia x_1 sia x_2 preferiscono a_2 a entrambe. Questa semplice rappresentazione grafica permette pertanto di escludere alcune delle possibili alternative: a_j non può essere l'alternativa di maggioranza se nel quadrante in alto a destra giace una differente alternativa a_i.
Ripetendo la costruzione per i piani di coordinate x_2, x_3 e x_1, x_3 possiamo escludere via via le alternative, restando con una sola alternativa (l'alternativa di maggioranza) o senza alcuna alternativa (per ogni alternativa ne esiste un'altra ad essa preferita dalla maggioranza).
Analizziamo con questo metodo l'Esempio 1.

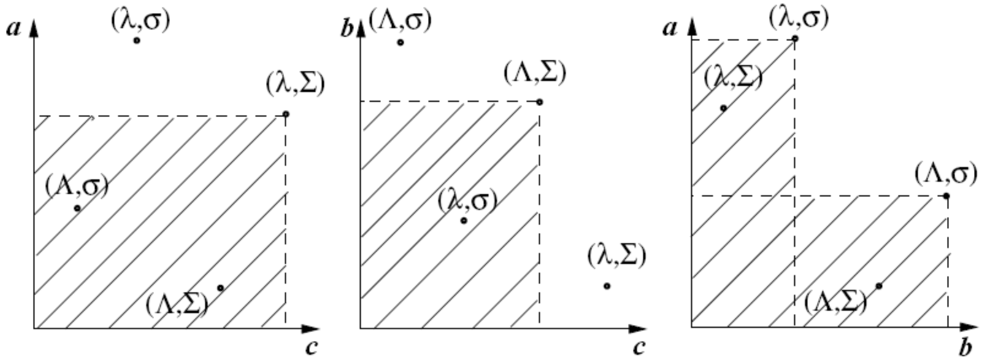

Figura 2. Rappresentazione grafica dell'Esempio

Osserviamo che tutte le quattro alternative vengono escluse. In questo caso non esiste l'alternativa di maggioranza, non c``e una alternativa preferita a tutte le altre, e l'esito della votazione dipende da quali sono i candidati ...
Ma quindi quale è realmente la "volontà degli elettori"? Viene naturale chiedersi se esista (e quale sia) un sistema elettorale *buono*, ovvero soddisfacente almeno quel minimo di requisiti che riteniamo necessari per una reale democrazia.

5. La legge di benessere sociale

Cerchiamo quindi di definire in modo chiaro e preciso cosa intendiamo con *legge di benessere sociale*.
Siano K un insieme finito (con k elementi) di alternative, e $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ l'insieme dei cittadini, dei votanti o degli elettori, che dir si voglia. Supponiamo che ogni elettore c_h abbia ben definito un personale ordine (totale) di preferenze $\geq_h$ tra le alternative in K, ovvero un ordinamento totale di K. Diremo che x e y sono indifferenti per c_h ($x =_h y$) se $x \geq_h y$ e $y \geq_h x$. Inoltre diremo che x è preferito ad y da c_h ($x >_h y$) se $x \geq_h y$ e $x \neq_h y$. Osserviamo le seguenti importanti proprietà dell'ordinamento totale:

(1) (transitività) $\forall x, y, z \in K$ se $x \geq_h y$ e $y \geq_h z$, allora $x \geq_h z$.
(2) (tricotomia) $\forall x, y \in K$ vale una delle tre possibilità
  a) c_h preferisce x a y: $x >_h y$;
  b) c_h preferisce y a x: $x <_h y$;
  c) c_h trova indifferenti x e y: $x =_h y$.

Chiamiamo $\mathcal{P}$ l'insieme degli ordinamenti di K.
Una legge di benessere sociale è una funzione Φ, che assegnate le preferenze individuali dei cittadini C, identifica una preferenza sociale:

$$\Phi : \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}.$$

Osserviamo che una tale funzione garantisce l'esistenza di una preferenza sociale $\Phi(\geq_1, ..., \geq_n)$ qualunque siano le preferenze individuali $\geq_1, ..., \geq_n$ dei cittadini, ovvero ogni cittadino ha libertà di voto[6]. Osserviamo che per ora non abbiamo imposto nessuna richiesta a questa funzione di benessere sociale.
Affinché siano rispettate le più elementari norme della democrazia, faremo ora alcune richieste sulla funzione Φ. Vogliamo che la legge di benessere sociale soddisfi i seguenti assiomi:

A1 (Sovranità dei cittadini) Per ogni coppia ordinata di elementi x, y di K esistono delle preferenze individuali tali che la legge di benessere sociale faccia preferire x a y:

$$\forall (x, y) \in K \times K, x \neq y \quad \exists (\geq_1, ..., \geq_n) \in \mathcal{P}^n :$$
$$\Phi(\geq_1, ..., \geq_n) = \geq_\Phi \in \mathcal{P} \quad x >_\Phi y$$

A2 (Correlazione positiva) Se ad una certa ennupla di preferenze individuali, la legge di benessere sociale fa preferire x a y, allora in un'altra ennupla di preferenze individuali differente dalla prima solo perché x ha migliorato la sua posizione, la legge di benessere sociale fa preferire x a y:

$$\Phi(\geq_1, ..., \geq_n) = \geq_\Phi \in \mathcal{P} \ : \quad x >_\Phi y;$$
$$(\geq'_1, ..., \geq'_n) \in \mathcal{P}^n \ : \quad \forall h \in \{1, ..., n)\}, \quad \forall z, w \in K \setminus \{x\}$$
$$(z \geq'_h w) \Leftrightarrow (z \geq_h w) \ (x \geq'_h z) \Leftarrow (x \geq_h z);$$
$$\Phi(\geq'_1, ..., \geq'_n) = \geq'_\Phi \in \mathcal{P}$$
$$\Downarrow$$
$$x >'_\Phi y.$$

A3 (Invarianza per le alternative irrilevanti) Se ad una certa ennupla di preferenze individuali, la legge di benessere sociale fa preferire x a y, allora in un'altra ennupla di preferenze individuali con le stesse posizioni relative di x e y, la legge di benessere sociale fa preferire x a y:

$$\Phi(\geq_1, ..., \geq_n) = \geq_\Phi \in \mathcal{P} \ : \quad x >_\Phi y;$$
$$(\geq'_1, ..., \geq'_n) \in \mathcal{P}^n \ : \quad \forall h \in \{1, ..., n)\}$$
$$(x \geq'_h y) \Leftrightarrow (x \geq_h y) \ (y \geq'_h x) \Leftarrow (y \geq_h x);$$
$$\Phi(\geq'_1, ..., \geq'_n) = \geq'_\Phi \in \mathcal{P}$$
$$\Downarrow$$
$$x >'_\Phi y.$$

A4 (Non dittatorialità) La legge di benessere sociale non associa ad ogni ennupla di preferenze l'ennupla di un determinato cittadino, detto dittatore:

$$\forall h \quad \Phi \neq \pi_h \quad (\pi_h(\geq_1, ..., \geq_n) = \geq_h)$$

[6] A patto che rispetti la regola di transitività nelle sue preferenze

6. Il teorema di Arrow

Teorema 2 (Arrow, 1971). *Se* $n \geq 2$ e $k \geq 3$ *non esiste una legge di benessere sociale che verifichi gli assiomi* **A1**, **A2**, **A3** e **A4**.

Osservazione 3. In modo equivalente il teorema di Arrow si può enunciare nel seguente modo: "Se $n \geq 2$ e $k \geq 3$ le uniche leggi di benessere sociale che verifichino gli assiomi **A1**, **A2** e **A3** sono le dittature".

Osservazione 4. Se le alternative sono $k = 2$, la votazione a maggioranza

$$\begin{aligned} x >_\Phi y &\iff \# \{h : x >_h y\} > \# \{h : y >_h x\} \\ x <_\Phi y &\iff \# \{h : x >_h y\} < \# \{h : y >_h x\} \\ x =_\Phi y &\iff \# \{h : x >_h y\} = \# \{h : y >_h x\} \end{aligned}$$

soddisfa i quattro assiomi ed è pertanto una buona legge di benessere sociale (ed è l'unica buona).

Osservazione 5. I sistemi elettorali abitualmente usati non soddisfano la proprietà **A3**, ed è proprio perché le alternative irrilevanti non sono affatto irrilevanti alla fine del risultato finale che si vedono tanti litigi sulla presenza o meno di una piccola lista ad un'elezione (come è stato il caso di Alternativa Sociale di Alessandra Mussolini alle Regionali del Lazio 2005).

Enunciamo ora un'altra proprietà, detta proprietà di Pareto, o dell'unanimità, che ci aspettiamo sia soddisfatta da una buona legge di benessere sociale.

P (Unanimità) Se tutti i cittadini sono d'accordo a preferire x a y, allora la legge di benessere sociale preferisce x a y:

$$\forall h \ \ x >_h y \quad \Rightarrow \quad x >_\Phi y$$

Lemma 6. *Se* Φ *soddisfa* **A1**, **A2** e **A3**, *allora soddisfa P.*

Dimostrazione. Sia $\geq = (\geq_1, ..., \geq_n)$ una ennupla di preferenze tale che per ogni h $x >_h y$.
Per **A1** esiste una ennupla di preferenze individuali $\geq' = (\geq'_1, ..., \geq'_n)$ tale che

$$x >'_\Phi y. \tag{2}$$

Sia $\geq'' = (\geq''_1, ..., \geq''_n)$ l'ennupla di preferenze individuali ottenuta da $\geq$ spostando x in prima posizione in ogni graduatoria individuale:

$$\begin{aligned} &\forall h, \ \forall z \in K \setminus \{x\} \quad x >''_h z \\ &\forall h, \ \forall z, w \in K \setminus \{x\} \quad z \geq''_h w \iff z \geq'_h w \end{aligned}$$

Per **A2** $x >''_\Phi y$. Le preferenze individuali di $\geq$ e $\geq''$ preferiscono x a y e pertanto **A3** implica $x >_\Phi y$. ■

Diciamo che un sottoinsieme dei cittadini $S \subset C$ è *decisivo per l'alternativa x rispetto alla alternativa y* se basta che gli individui di S preferiscano x a y affinché la legge di benessere sociale preferisca x a y:

$$\forall h \in S \ \ x >_h y \Rightarrow x >_\Phi y$$

Diciamo che un sottoinsieme dei cittadini è *decisivo* se è decisivo per x rispetto a y, per ogni $x, y \in A$. Un singoletto, ovvero un sottoinsieme di un solo elemento, decisivo viene detto un *dittatore*. **A4** afferma che non esiste un dittatore.

Osservazione 7. Per il Lemma 6 l'insieme C di tutti i cittadini è decisivo.

Lemma 8. *Assumiamo* **A1** *e* **A2**. $S \subset C$ *è decisivo per x rispetto a y* se e solo se

$$x >_\Phi y \Leftarrow \begin{cases} \forall h \in S, \ x >_h y \\ \forall s \notin S, \ y >_s x \end{cases} \tag{3}$$

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Ovvio.
($\Leftarrow$) Sia ($\geq'_1, \ldots, \geq'_n$) una qualsiasi ennupla di preferenze per cui $\forall h \in S \;\; x >'_h y$. Consideriamo l'ennupla di preferenze ($\geq_1, \ldots, \geq_n$) che coincide con la precedente tranne per il fatto che x è all'ultimo posto nelle preferenze dei cittadini $s \notin S$. Per ipotesi $x > y$.
Quindi per **A2** $y >' x$. ■

Lemma 9. *Supponiamo* **A1***,* **A2** *e* **A3***. Se $D \subset C$ è decisivo per x rispetto ad y, allora è decisivo.*

Dimostrazione. Se $C = \{x, y\}$ allora non c'è nulla da dimostrare.
Sia $z \in C \setminus \{x, y\}$ una terza alternativa. Consideriamo una ennupla di preferenze individuali tale che

$$(1)\ \forall h \in D,\ x >_h y >_h z\ ;$$
$$(2)\ \forall s \notin D,\ y >_s z >_s x.$$

Poiché D è decisivo per x rispetto ad y, $x >_\Phi y$. Inoltre (poiché C è decisivo) $y >_\Phi z$. Pertanto $x >_\Phi z$ e, per il Lemma 8, D è decisivo per x rispetto a z, qualunque sia $z \in K \setminus \{x\}$.
Ripetendo il ragionamento (che lasciamo come facile esercizio per il lettore) per $t \in K \setminus \{x, z\}$, si dimostra che D è decisivo per t rispetto a z, qualunque siano $t \neq z \in K \setminus \{x\}$ e infine che D è decisivo per t rispetto ad x qualunque sia $t \in K \setminus \{x\}$.
Pertanto D è decisivo. ■

Corollario 10. *Supponiamo* **A1***,* **A2** *e* **A3***. Se un individuo è decisivo per x rispetto ad y, allora è un dittatore.*

Dimostrazione. (Teorema di Arrow) Siano $x, y \in K$ alternative. Per il Lemma 5, C è decisivo per x rispetto ad y. Consideriamo un insieme decisivo per x rispetto ad y minimale (ovvero non avente sottoinsiemi propri decisivi), D. Per l'assioma **A4** ed il Lemma 9 D ha almeno due elementi, quindi possiamo scrivere come unione di due suoi sottoinsiemi propri e non vuoti disgiunti:

$$D = D_1 \cup D_2, \quad D_1 \neq 0 \quad D_2 \neq 0 \quad D_1 \cap D_2 = 0.$$

Poiché per ipotesi ci sono almeno tre alternative, consideriamo una terza alternativa $z \in K \setminus \{x, y\}$ e una qualsiasi ennupla di preferenze tale che:

$$(1)\ \forall h \in D_1,\ \ x >_h y >_h z\ ;$$
$$(2)\ \forall h \in D_2,\ \ z >_h x >_h y\ ;$$
$$(3)\ \forall j \in D,\ \ \ y >_h z >_h x.$$

Nella graduatoria collettiva si avrà quindi $x >_\Phi y$. Inoltre, per la tricotomia, si avrà $y >_\Phi z$, $y =_\Phi z$ oppure $y <_\Phi z$. Se fosse $y >_\Phi z$ o $y =_\Phi z$, allora per transitività $x >_\Phi z$. Per l'assioma **A3** questa conclusione continua a valere in tutti i casi in cui

$$(1)\ \forall h \in D_1,\ \ x >_h y >_h z\ ;$$
$$(2)\ \forall j \notin D_2,\ \ \ y >_h z >_h x.$$

e pertanto D_1 sarebbe decisivo per x rispetto a z. Per il Lemma 8 D_1 sarebbe decisivo, contro la minimalità di D.
Se fosse $z >_\Phi y$, per l'assioma **A3** sarebbe così in tutti i casi in cui

$$(1)\ \forall s \in D_2,\ \ z >_h y;$$
$$(2)\ \forall j \notin D_2,\ \ \ y >_j z.$$

e pertanto D_2 sarebbe decisivo per z rispetto a y. Per il Lemma 8 D_2 sarebbe decisivo, contro la minimalità di D. Assurdo. ■

7. Curiosità elettorali

Concludiamo citando due interessanti aneddoti collegati ai problemi delle elezioni. Gli aneddoti sono presi da {[4], Capitolo 7} e riguardano la distribuzione dei seggi tra vari collegi elettorali.
La distribuzione dei seggi tra i collegi avviene generalmente[7] nel seguente modo: si devono dividere n seggi tra k collegi ($c_1, ..., c_k$), di popolazione votante rispettivamente $p_1, ..., p_k$. Sia $P = \sum p_i$ la popolazione votante totale. Per ogni seggio c_i si calcola la proporzione

$$n : x_i = P : p_i$$

Se gli x_i sono tutti interi, abbiamo suddiviso correttamente i seggi tra i vari collegi. Se non sono tutti interi[8], si assegnano ad ogni collegio $[x_i]$ seggi[9] e gli $n - \sum [x_i]$ seggi restanti si assegnano agli $n - \sum [x_i]$ con resto $\{x_i\} = x_i - [x_i]$ maggiore.
Il criterio sembra ottimale, però ...

7.1. ***Il paradosso dell'Alabama.*** Nel 1880 gli Stati Uniti aumentarono i seggi (n) al Congresso da 299 a 300. Tutti si aspettavano che uno Stato avrebbe avuto un deputato in più. Invece due Stati guadagnarono un seggio, mentre l'Alabama ne perdeva uno!
Questo accade perché, aumentando n, i resti aumentano in maniera diversa[10] tra i vari Stati o collegi e può capitare (come in questo caso) che due Stati ne superino un terzo.

7.2. ***Il paradosso del nuovo stato.*** Nel 1907 l'Oklahoma entrò a far parte degli Stati Uniti, e per fargli posto al Congresso, vennero aggiunti i 5 nuovi seggi che gli sarebbero spettati. Ma nel far questo, per lo stesso motivo di prima, New York perse un seggio a favore del Maine.

Bibliografia

[1] Kenneth J. Arrow, Social choice and individual values, Yale University Press, 1951.
[2] Duncan Black and R. A. Newing, Committee decisions with complementary valuation, William Hodge and Company Limited, 1951.
[3] Steven J. Brams, Spacial models of election competition, UMAP monograph series, 1979.
[4] Piergiorgio Odifreddi, C'era una volta un paradosso, Einaudi, 2001.

---

[7] In realtà il metodo è complicato dal problema della rappresentanza: ad ogni collegio devono spettare almeno un certo numero di seggi (sicuramente non riteniamo democratica un elezione che non assegna seggi ad un determinato collegio).
[8] Se non sono tutti interi, esistono vari metodi per trattare i resti, tutti con qualche inevitabile problemino. Esponiamo quello dei "massimi resti".
[9] Parte intera di x_i: il più grande numero intero minore o uguale a x_i
[10] Aumentano ovviamente in maniera proporzionale alla popolazione votante dello Stato, ovvero più velocemente per gli Stati grandi.